341. 函數方程式ニ就テ, V

福　原　満　洲　雄（北大）

完備シタ線状D空間Eニ於ケル一次方程式ニ関シテハ Riesz ノ研究（Acta Math. 1918）ガアルコトヲ南雲氏カラ注意ヲ受ケマシタガ、実ハ Leray-Schauder モソレヲ引用シテ居タノデ，ウッカリ見落シテ居タモノデシタ、ソレニ依ッテ III デ述ベタ定理モ成立シ，南雲氏ガ示サレタ如ク

$$X - kF(X) = x$$

ノ解ガ k ノ有理型函数トナルコトモ明カニナリマシタ、コレデ Fredholm ノ積分方程式ノ抽象化ハ大体片ガツイタワケデスガ，更ニ非線形方程式ヘ進ムニハ

$$X - kF(X) = 0$$

ノ解 $X=0$ ノ indice ヲ求メテオカナケレバナラナイ、ソレモ Leray-Schauder ガ求メテヰルノデスガ，ソレガ ± 1 デアルコトハ次ノヤウニ考ヘテモヨイヤウデス、k ガ複素数デアルトキニ kx（$x \in E$）ガ定義サレテヰルナラバ、ソノ指数ハ $+1$ デアル、コレハ固有値ガ孤立シテヰルコトカラ得ラレル簡単ナ事実ニ過ギナイ。ソノ際

$$\|kx\| = |k| \cdot \|x\|$$

ナル関係ハ k ガ実数ノ時ニ成立シテ居レバヨイノデ，一般ニ k ガ複素数ナラバ

$$\|kx\| \leqq L|k|.\|x\|$$

トナルヤウナkニ無関係ナLガ取レレバヨイ。従ッテkx $(x\in E)$ ガkノ実数値ニ對シテノミ定義サレテ居ル場合ニハ虚単位iヲ導入シテ$x+iy$ナル点ノ集合ヲE^*デ表ハシ

$$(\mu+i\nu)(x+iy)=\mu x-\nu y+i(\nu x+\mu y)$$
$$\|x+iy\|=\sqrt{\|x\|^2+\|y\|^2}$$

ト定義シ，

$$F(x+iy)=F(x)+iF(y)$$

ニ依ッテ$F(x)$ヲE^*デ定義サレタ函数ト見做セバ

$$X-F(X)=0$$

ノ解$X=0$ノindiceハ$+1$トナル。コレハE^*ニ於テ考ヘテノ話デアルカラEニ戻ッテ考ヘレバソノindiceハ± 1トナル。

尚II デ Leray-Schauder カラ引用シタノハ定理2ダケデアルガ，ソレハ彼等ガ théorème fondamental ト名ヅケテ居ルモノノ一部分デアル、而モソノ théorème fondamental モ indice ガ持ツ性質カラ得ラレル結果ノ一部分ニ過ギナイコトモ彼等ガ注意シテ居ル通リデアル、ソノ théorème fondamental ノ残ッタ部分ハ次ノヤウニ述ベラレル。

定理14. 「定理2ト同ジ假定ノ下ニ次ノ性質ヲ持ツ連続体Γガ存在スル。Γハ

$$(1) \qquad x - F(x, k) = 0$$

ノ解カラ成ル。Kニ屬スル勝手ナ k ノ値ニ對シテ Γ ハ (x, k) ナル点ヲ含ム、即チ Γ ヲ E ニ平行ニ実軸上ニ射影スレバ K ト一致スル」

此ノ証明ガ腑ニ落チナカッタノデアルガ、ソレハ次ノヤウニシテ証明サレル。(Leray-Schauder ハ(1)ガ $k = k_0$ ノトキ有限個ノ解ヲ持ットシ，此ノ假定ヲ利用シテ居ルノデアルガ、此ノ假定ハ本質的ナ意味ヲ持タナイ)

(1) ノ解ノ集合ヲ C トスル、C ヲ成分ニ分ケ，ソノ一ツノ成分 C_1 ヲ取レバ，任意ノ正ノ数 ε ニ對シテ

$$C_1 \subset U_1 \subset U_\varepsilon(C_1), \qquad U_1' C = 0$$

デアルヤウナ開集合 U_1 ガ取レル、但シ $U_\varepsilon(A)$ ハ A カラ ε ヨリ小サイ距離ニアル点ノ集合ヲ表ハシ，U' ハ U ノ縁ヲ表ハス。C ハ compact デアルカラ C ノ成分 $U_1, \cdots\cdots, U_m$ ヲ適當ニ取レバ C ハ $U_1, \cdots\cdots, U_m$ デ被ハレル。從ッテ

$$U_1 + \cdots\cdots + U_m \supset C$$

$$C_j \subset U_j \subset U_\varepsilon(C_j), \quad U_j' C = 0 \quad (j = 1, 2, \cdots\cdots, m)$$

トナル、此ノ時更ニ

$$U_j U_k = 0 \qquad (j, k = 1, 2, \cdots\cdots, m;\ j \neq k)$$

トナルヤウニ出來ル．$k =$ 一定，$x \in E$ デアルヤウナ点 (x, k) ノ集合ヲ $E(k)$ デ表ハスコトニスレバ $\Omega F(k_0) = \omega(k_0)$ ニ於ケル (1) ノ解ノ indice total ハ 0 デナイ、ソレハ $U_1 E(k_0), \cdots\cdots, U_m E(k_0)$ ニ於ケル

indice total ノ和ニ等シイ。故ニ方程式(1)ノ $\mho_1 E(k_0)$ ニ於ケル *indice total* ガ 0 デナイト假定シテヨイ。$\mho_1 = \Omega_1$, $C_1 = \Gamma_1$ ト置キ，正ノ数 ε_1 ヲ取リ，Ω, ε カラ出発シテ Ω_1, Γ_1 ヲ求メタト同様ニ，Ω_1, ε_1 カラ出発シテ Ω_2, Γ_2 ヲ求メル、更ニ正ノ数 ε_2 ヲ取リ同様ナ方法デ Ω_2, ε_2 カラ Ω_3, Γ_3 ヲ求メル、此ノヤウニシテ続ケテ行ケバ 0 ニ収斂スル正ノ数ノ列 $\{\varepsilon_j\}$ ガ與ヘラレタトキ，次ノ性質ヲ満タス $\{\Omega_j\}$, $\{\Gamma_j\}$ ガ求メラレル。

$$\Omega_j \supseteqq \Omega_{j+1},\ \mho_\varepsilon(\Gamma_j) \supset \Omega_j \supset \Gamma_j\ ,\ \Omega_j' C = 0$$
$$(j = 1, 2, \text{---------});$$

Ω_j ハ開集合，Γ_j ハ C ノ成分；

$\Omega_j E(k_0) = \omega_j(k_0)$ ニ於ケル(1)ノ解ノ *indice total* ハ 0 デナイ。

$\Gamma = \prod_{j=1}^{\infty} \overline{\Omega}_j$ ト置ケバ Γ ガ定理デ述ベテヰル性質ヲ満タス連続体トナル。